Nullstellen Berechnung
bei ganzrationalen Funktionen höheren Grades

Ermitteln Sie die Nullstellen der folgenden Gleichung:

$f(x) = x^2 * (x+2)^2 * (x^2+4)$

Da hier offensichtlich eine Funktion höheren Grades vorliegt, können die Nullstellen erst bestimmt werden, wenn als erster Schritt die Funktionsgleichung ausmultipliziert und ihre Glieder geordnet wurden.

$f(x) = x^2 * (x + 2)^2 * (x^2 + 4)$	I	1. Binom
$f(x) = x^2 * (x^2 + 4x + 4) * (x^2 + 4)$	I	Ausmultiplizieren
$f(x) = x^2 * (x^4 + 4x^2 + 4x^3 + 16x + 4x^2 + 16)$	I	Zusammenfassen
$f(x) = x^2 * (x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x^2 + 16x +16)$	I	Ordnen
$f(x) = x^2 * (x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x +16)$	I	Zusammenfassen
$f(x) = x^6 + 4x^5 + 8x^4 + 16x^3 +16x^2$	I	Funktionsgleichung

Es liegt eine Funktionsgleichung höheren Grades, genauer gesagt ein Polynom vom Grad 6 vor. Da ein Ausklammern des kleinsten gemeinsamen Faktors x^2 möglich ist, lassen sich als Erstes direkt 2 Nullstellen bestimmen.

$f(x) = x^2 (x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x +16)$	I	Kleinster gemeinsamer
	I	Faktor x^2 kann ausge-
$x_{Null\ ½} = 0$	I	klammert werden.

Um die Gleichung weiter zu vereinfachen folgen nun diese Schritte.

1. Gleichung 0 setzen (Funktionsgleichung wird zur algebraischen Gleichung)

2. Nullstelle durch systematisches ausprobieren suchen

3. Bildung bzw. Abspaltung des Linearfaktors

4. Polynomdivision durchführen um die Gleichung weiter zu vereinfachen.

5. Anwendung des Standardverfahrens PQ-Formel

<u>1. Gleichung 0 setzen</u>

Die Funktionsgleichung wird in eine Bestimmungsgleichung umgewandelt. Dazu wird die Gleichung einfach Null gesetzt.

$f(x) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x +16$	I	Gleichung 0 setzen
$0 = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x +16$		

Nullstellen Berechnung
bei ganzrationalen Funktionen höheren Grades

2. Nullstelle durch systematisches probieren suchen

Es wird eine Nullstelle geraten. Am besten legt man sich eine Wertetabelle an und probiert mit dem Taschenrechner, ob die Gleichung die Bedingung 0 = 0 erfüllt (?).

x	0	+ 1	+ 2	– 1	– 2
y	+16	+45	> +45	+8	0

$0 = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 16$ I Ausgangsgleichung

$0 = (0)^4 + 4(0)^3 + 8(0)^2 + 16(0) + 16$ I x = 0 aus Wertetabelle einsetzen
$0 \neq +16$ I Die Gleichung geht nicht auf !

$0 = (-2)^4 + 4(-2)^3 + 8(-2)^2 + 16(-2) + 16$ I x = –2 aus Wertetabelle einsetzen
$0 = 0$ I Die Gleichung geht auf !

3. Bildung bzw. Abspaltung des Linearfaktors

Als eine Nullstelle wurde durch systematisches probieren der Wert –2 ermittelt. Dieser Wert wird nun verwendet, um den sogenannten Linearfaktor zu bilden. Der Linearfaktor ist ein Term, der benötigt wird um das eigentliche Verfahren, also die Polynomdivision durchführen zu können. Gebildet wird er wie folgt.

$\boxed{\text{Linearfaktor} = x - k_n}$

x = Variable
k_n = Variable für die gefundenen Nullstelle

Linearfaktor = (x + 2) k_n = – 2 einsetzen um Linearfaktor zu bilden

Der Term $(x - k_n)$ heisst Linearfaktor der ganzrationalen Funktion f(x) wenn $k_n = 0$ ist.

Der Linearfaktor ist ebenfalls immer auch ein <u>ganzzahliger Teiler</u> des Absolutgliedes a_0 <u>bei ganzzahligen Koeffizienten</u>. Sollte sich durch systematischen Ausprobieren keine Nullstelle finden lassen, dann kann eine als ganzzahliger Teiler über das Absolutglied bestimmt werden. Bei der Polynomdivision zeigt sich dann durch Ausprobieren, ob die geratene Nullstelle richtig ist ? In diesem Fall geht die Polynomdivision ohne Rest auf. Ist der Teiler keine Nullstelle, so verbleibt ein Rest, die Nullstelle wurde falsch geraten. Es gibt kein Patentrezept, nur ausprobieren hilft !

$\boxed{f\ x = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}$ mit $n \in \mathbb{N}$; $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

$f(x) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 16$ I Absolutglied a_0 = 16 (die Zahl ohne x)

Ganzzahlige Teiler von +16 sind +1,+2,+4,+8,+16 und –1, –2, –4, –8, –16.

Nullstellen Berechnung
bei ganzrationalen Funktionen höheren Grades

4. Polynomdivision durchführen um die Gleichung weiter zu vereinfachen

Die Polynomdivision ist der Name für ein Verfahren, das angewandt werden kann um eine Gleichung höheren Grades in eine Gleichung mit niedrigerem Grad umzuwandeln. Hierbei wird der Ausgangsterm durch einen Linearfaktor dividiert.

Verbleibt kein Rest, ist das Ergebnis eine weitere Gleichung mit geringerem Grad. Auf sie kann dann ein Standardverfahren wie die PQ-Formel angewendet werden.

$x + 2$	Linearfaktor
$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 16$	Ausgangsterm

$(x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 16) : (x + 2) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$	
$-\underline{(x^4 + 2x^3)}$	
$0 \quad +2x^3 + 8x^2$	Erstes Element durch das Erste Ele-
$-\underline{(+2x^3 + 4x^2)}$	ment des Linearfaktors (x) teilen.
$0 \quad + 4x^2 + 16x$	Das Ergebnis hinter dem = notieren
$-\underline{(+4x^2 + \ 8x)}$	Aufgeschriebenes Ergebnis mit Term
$0 \qquad 8x + 16$	des Linearfaktors ausmultiplizieren.
$-\underline{(8x + 16)}$	Nächstes Element runterholen… ect.

Rest Null, die Polynomdivision geht auf, die Nullstelle stimmt !
$x_{\text{Nullstelle 3}} = -2$

Das Ergebnis ist ein Term mit niederem Grad als das ursprüngliche Ausgangpolynom. Das hier jedoch ein Term des 3. Grades vorliegt kann die PQ-Formel noch nicht angewendet werden. Aus diesem Grund wird nochmals eine Polynomdivision durchgeführt um den Term weiter zu vereinfachen.

$x^3 + 2x^2 + 4x + 8$	Ausgangsterm
$0 = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$	Term Null setzen
$0 = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$	Die Nullstelle liegt ebenfalls bei –2
$(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) : (x + 2)$	Polynomdivision, Linearfaktor = (x+2)

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^3 + 2x^2 + 4x + 8) : (x + 2) = x^2 + 4 \\
-\underline{(x^3 + 2x^2)} \\
\quad 0 \qquad 0 \\
\qquad\qquad 4x + 8 \\
\qquad\quad -\underline{(4x + 8)}
\end{array}
$$

Rest Null, die Polynomdivision geht auf, die Nullstelle stimmt !
$x_{\text{Nullstelle 4}} = -2$

Nullstellen Berechnung
bei ganzrationalen Funktionen höheren Grades

<u>5. Anwendung des Standardverfahrens PQ-Formel</u>

Der stark vereinfachte Term $x^2 + 4$ bleibt übrig. Jetzt kann die PQ-Formel angewendet werden um die Nullstellen zu bestimmen. Achtung ! Das Normalisieren bitte nicht vergessen !

$0 = x^2 + 4$	I	Ausgangsterm null setzen
$\boxed{x_{1/2} = -(\frac{p}{2}) \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}}$	I	PQ-Formel ; p = b ; q = c der Allgemeinform
$x_{5/6} = -(\frac{0}{2}) \pm \sqrt{(\frac{0}{2})^2 - (+4)}$	I	Werte einsetzen p = 0 ; q = +4
$x_{5/6} = -(\frac{0}{2}) \pm \sqrt{(\frac{0}{2})^2 - (+4)}$		
$x_{5/6} = 0 \pm \sqrt{-4}$	I	Diskriminante negativ, $\Rightarrow$ keine Lösung !
IL = { }	I	Lösungsmenge bleibt leer, <u>keine Nullstelle !</u>

Oder wesentlich einfacher…

$x^2 + 4$	I	Ausgangsterm
$0 = x^2 + 4$	I	Null setzen
$0 - 4 = x^2$	I	Gleichung umstellen
$x = \sqrt{0 - 4}$	I	Diskriminante negativ !
$x_{1/2} = \pm \sqrt{-4}$	I	Lösungsmenge bleibt leer, <u>keine Nullstelle !</u>

$x_{\text{Nullstelle 1}} = 0$		
$x_{\text{Nullstelle 2}} = 0$		
$x_{\text{Nullstelle 3}} = -2$	I	Nullstelle der 1. Polynomdivision
$x_{\text{Nullstelle 4}} = -2$	I	Nullstelle der 2. Polynomdivision

Mail: dirkkipper777@hotmail.com
Web: http://www.dirkkipper.de/

Dirk Kipper