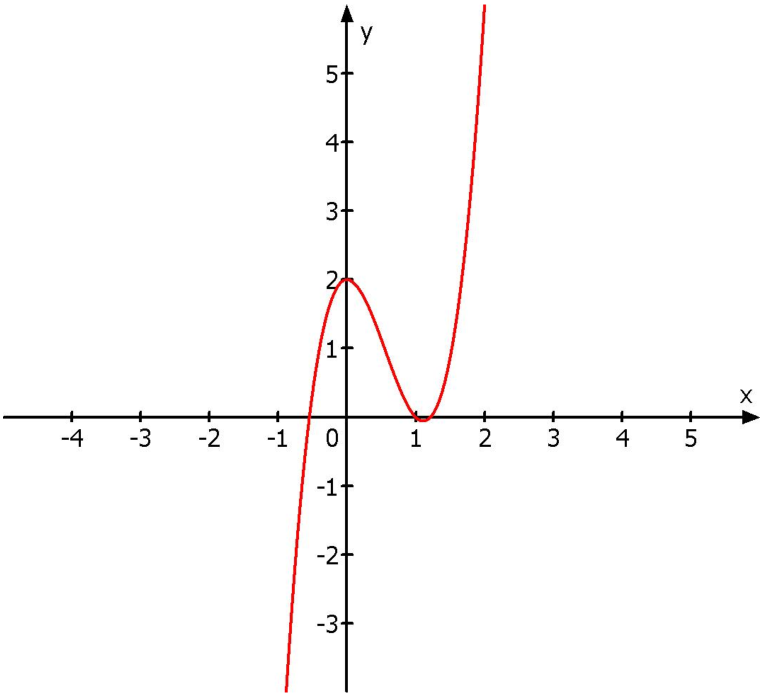
Globalverhalten ganzrationaler Funktionen

Wenn man das Globalverhalten einer ganzrationaler Funktionen untersucht, dann betrachtet man das Verhalten von f(x), wenn der Faktor x gegen +/– unendlich läuft.

Als Beispiel wird daher das Globalverhalten für die Funktion $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$ betrachtet. Was passiert mit dem Wert für y, wenn x gegen +/– unendlich läuft ?



Wertetabelle: 1. f(x) = 3*x^3-5*x^2+2

x	-6	-5,5	-5	-4,5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0
y	-826	-648	-498	-373	-270	-188	-124	-76,1	-42,0	-19,4	-6,00	0,38	2,00

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
y	1,13	0,00	0,88	6,00	17,63	38,00	69,38	114,0	174,1	252,0	349,9	470,0

Funktionsrechner
x-Wert 0
Ergebnis 2
Wertetabelle einrichten
Abstand
Drucken Kopieren Excel Word

Grafische Darstellung und Wertetabelle für die Beispielfunktion $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$

Anhand der Wertetabelle lässt sich die folgende Vermutung formulieren:
Für sehr <u>große</u> Werte von x werden die Funktionswerte für y immer <u>größer</u>.
Für sehr <u>kleine</u> Werte von x werden die Funktionswerte für y immer <u>kleiner</u>.

Es kann daher die folgende Behauptung aufgestellt werden.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \xrightarrow{!} +\infty$ Läuft y gegen + unendlich, läuft x ebenfalls gegen + unendlich

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \xrightarrow{!} -\infty$ Läuft y gegen – unendlich, läuft x ebenfalls gegen – unendlich

Globalverhalten ganzrationaler Funktionen

Wenn man nun das Globalverhalten von ganzrationalen Funktionen betrachtet, dann stellt sich folgende Frage. Welcher der Faktoren innerhalb einer ganzrationalen Funktion hat den größten Einfluss auf das Endergebnis. Also den Wert für f(x) ?

$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$ mit $n \in \mathbb{N}$; $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

Dies ist immer der Faktor x^n, also das Glied mit dem höchsten Exponenten. Er spielt die dominanteste Rolle im Zusammenspiel mit seinem Begleiter, dem Koeffizienten a_n. Daher wird der Koeffizient des Gliedes mit dem höchsten Exponenten a_n auch <u>Leitkoeffizient</u> genannt.

Da in der Mathematik eine Behauptung (mathematisches Zeichen "!") erst dann als wahr gilt wenn sie auch bewiesen wurde, folgt hier nun der mathematische Beweis.

<u>Behauptung:</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \xrightarrow{!} +\infty$$

<u>Beweis der Behauptung:</u>

$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$ | Ausgangsfunktion

$\lim_{x\to+\infty} (3x^3 - 5x^2 + 2)$ | Globalverhalten / Prozessverhalten

$\lim_{x\to+\infty} 3x^3(1 - \frac{5x^2}{3x^3} + \frac{2}{3x^3})$ | $3x^3$ ausklammern

$$\lim_{x\to+\infty} (3x^3 - 5x^2 + 2) = \lim_{x\to+\infty} 3x^3(1 - \frac{5x^2}{3x^3} + \frac{2}{3x^3})$$

Läuft x gegen + ∞, dann tendiert der Bruch $\frac{5x^2}{3x^3}$ gegen Null.

Läuft x gegen + ∞, dann tendiert der Bruch $\frac{2}{3x^3}$ gegen Null.

Es bleibt $\lim_{x\to+\infty} 3x^3(1 - 0 + 0) \Rightarrow +\infty * 1 \Rightarrow +\infty$

Es kommt darum <u>nur</u> auf das Glied mit dem höchsten Exponenten (Glied x^n) und auf den Leitkoeffizienten (Glied a_n) an. Beide spielen die dominanteste Rolle.

Globalverhalten ganzrationaler Funktionen

Die Frage lautet:
Wie wirkt sich Faktor x auf den Verlauf des Funktionsgraphen aus ?
Also was passiert mit y, wenn x zuerst von $-\infty$ nach 0 und dann gegen $+\infty$ läuft ?

$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$

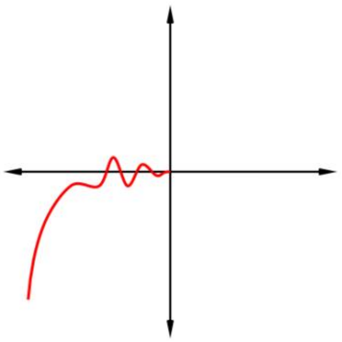
Der Prozess um herauszufinden was mit y geschieht, sieht demnach wie folgt aus…

1. Dominierend sind der Leitkoeffizient a_n und x^n, also der Term $+3x^3$

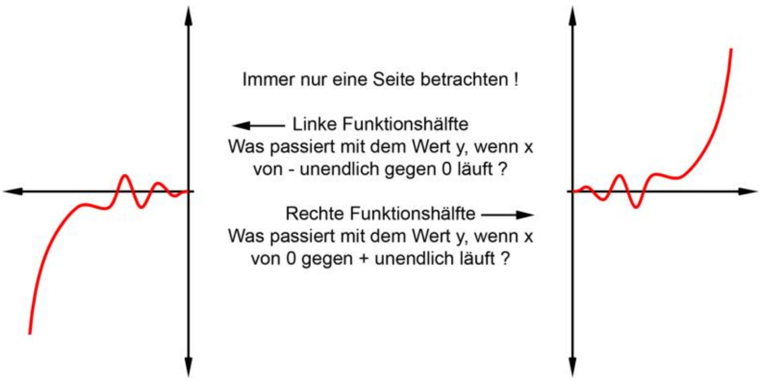
2. Jetzt für x negative Werte einsetzen, um x von $-\infty$ gegen 0 laufen zu lassen.
   $+3x^3 \Rightarrow +3\,(-5)^3 = -125$
   $+3x^3 \Rightarrow +3\,(-2)^3 = -24$

3. Tendenz -> Der Wert für y wird immer größer, wenn x von $-\infty$ gegen 0 läuft.

4. Ist der Leitkoeffizient a_n positiv oder negativ ? Steigt der Graph oder fällt er ?
   Der Leitkoeffizient a_n ist positiv, das Ergebnis für y ändert sich also nicht.



Verlauf des Graphen wenn x von $-\infty$ nach 0 läuft
(Läuft x von $-\infty$ nach 0, dann wird der Wert für y immer größer)



Getrennte Betrachtung einer Gesamtfunktion
Verlauf des Graphen wenn x zuerst von $-\infty$ nach 0 und dann gegen $+\infty$ läuft

Globalverhalten ganzrationaler Funktionen

Wie beim Potenzieren auch, bestimmt so das Vorzeichen des Leitkoeffizienten a_n und der Grad des Exponenten x^n, ob das Ergebnis für den Y-Wert einer Funktion positiv oder negativ wird. Die folgende Übersicht zeigt den Einfluss beider Faktoren auf den Verlauf einer Funktion.

a_n \ n	n gerade	n ungerade
a_n+	nach oben geöffnet	von unten nach oben
a_n-	nach unten geöffnet	von oben nach unten

Tabelle für das Globalverhalten der Funktionskurve

Positive Werte für f(x) bedeuten für einen Funktionsgraphen, dass die Kurve immer weiter ansteigen wird. Wird x größer, wird y auch größer und der Graph steigt. Die Kurve zeigt nach oben.

Negative Werte für f(x) bedeuten für einen Funktionsgraphen, dass die Kurve immer weiter fallen wird. Wird x kleiner, wird y auch kleiner und der Graph fällt. Die Kurve zeigt nach unten.

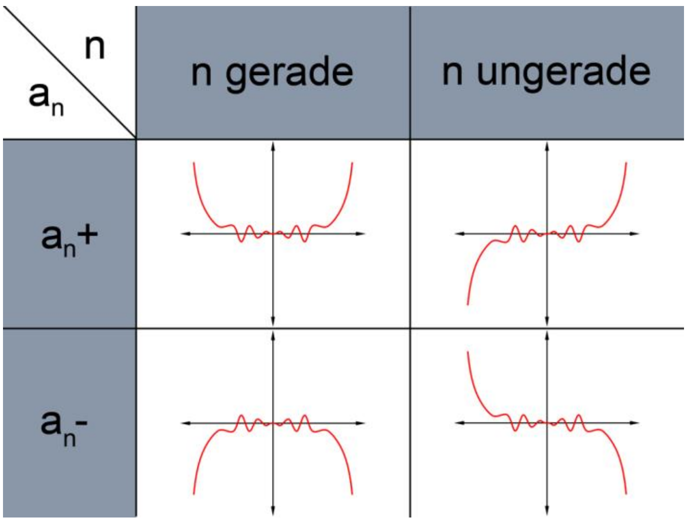


Tabelle für das Globalverhalten der Funktionsgraphen

Mail: dirkkipper777@hotmail.com
Web: http://www.dirkkipper.de/

Dirk Kipper