Lineare Funktionen

<u>Lineare Gleichungen</u>
Die graphische Darstellung einer linearen Funktion ist immer eine Gerade. Mathematisch kann eine Gerade allgemein mit der folgenden Formel ausgedrückt werden, die darum auch die Allgemeinform genannt wird.

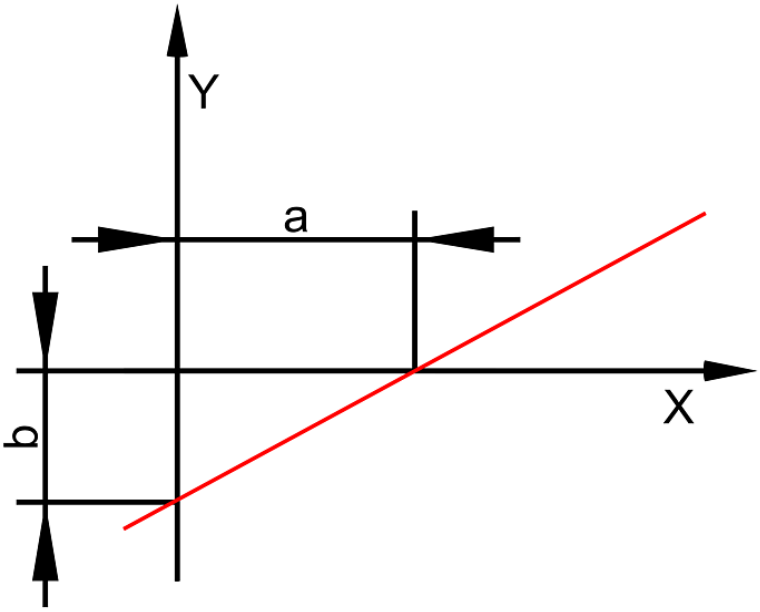
$$\boxed{ax + by + c = 0}$$ Allgemeinform

Jede Lösung einer Gleichung nach der Allgemeinform besteht aus einem Zahlenpaar für x und y. Dieses Zahlenpaar kann als Punkt gesehen werden, der mathematisch mit seinen Koordinaten P(X|Y) beschrieben wird.

Jeder Punkt repräsentiert damit also eine Lösung nach der Allgemeinform. Weil auf einer Geraden jedoch unendlich viele Punkte liegen, hat die Allgemeinform auch unendlich viele Lösungen.

Stellt man die Allgemeinform nach c um, ergibt sich der folgende Zusammenhang. Er wird auch Abschnittsform genannt. Das Verhältnis -a/b steht dabei für die Steigung (m) und das Verhältnis c/b für den Achsenabschnitt (b) bei der Normalform.

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$ Abschnittsform

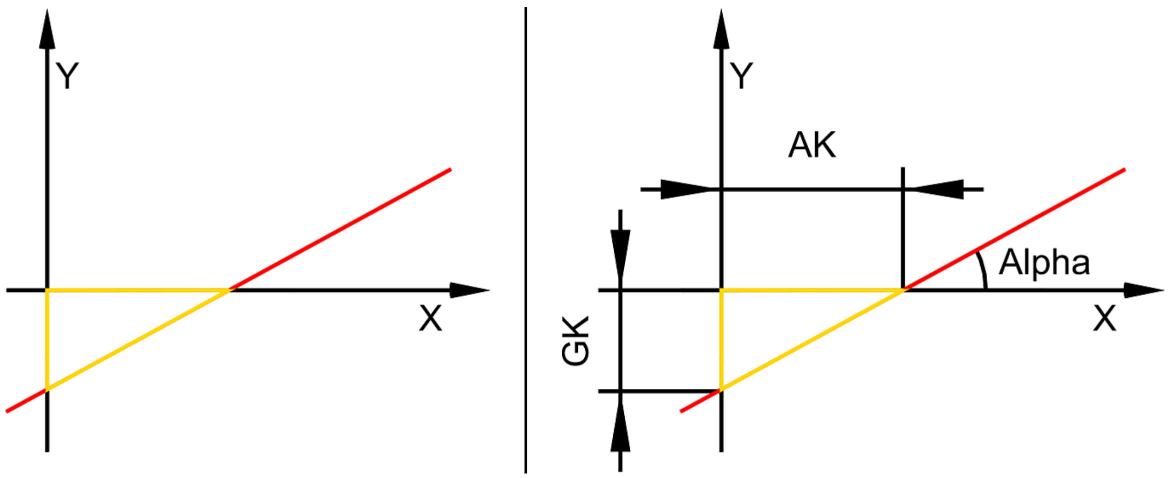


Koeffizienten der Allgemeinform

Lineare Funktionen

Das Steigungsdreieck

An jeder Geraden die steigt oder fällt, lässt sich ein Dreieck einzeichnen. Dieses Dreieck ist das sogenannte Steigungsdreieck. Wie bei Dreiecken üblich, ist auch hier der Satz des Pythagoras, eine Winkelfunktionen oder z.B. der Sinussatz anwendbar.



Das Steigungsdreieck und die Winkelfunktionen

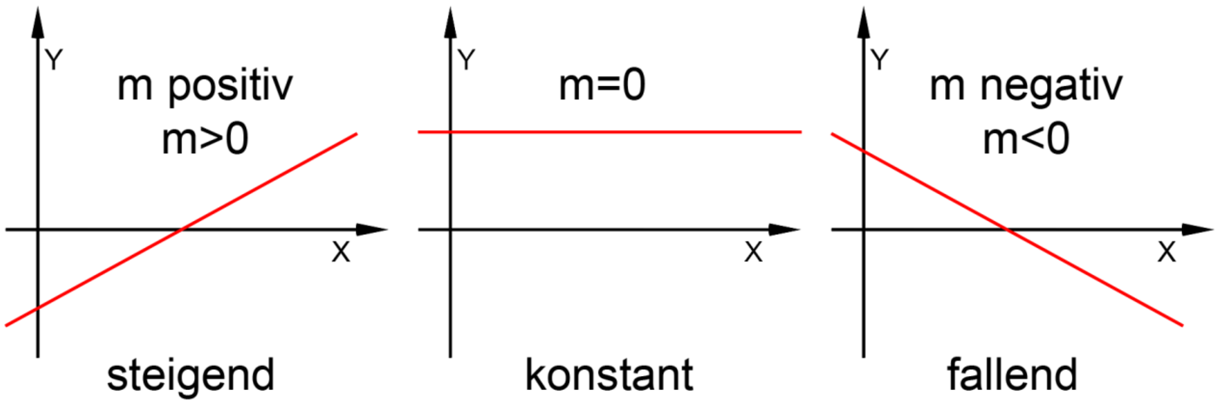
$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{GK}{AK}}$$

Die Steigung m

Als Steigung wird das Verhältnis Y-Einheiten zu X-Einheiten bezeichnet. Es gibt an, wie stark eine Gerade ansteigt (die Steigung ist +) oder abfällt (die Steigung ist -).

$$\boxed{m = \frac{Y-\text{Einheiten}}{X-\text{Einheiten}}}$$

Steigung m



Lineare Funktionen

<u>Überblick über die linearen Funktionen</u>

Bei den linearen Funktionen gibt es 3 verschiedene Formen. Je nach Fragestellung und den jeweils vorliegenden Werten können die folgenden drei Verfahren dazu benutzt werden um die Gerade selbst, ihre Punkte, sowie die Schnittpunkte in einem Koordinatensystem mit der X bzw. Y-Achse oder mit einer anderen Geraden zu berechnen.

Die 3 unterschiedlichen Formen bei linearen Gleichungssystemen.

a.	Die Normalform	Steigung ist bekannt, für x wird y berechnet
b.	Die Punkt Steigungsform	1 Punkt und die Steigung ist bekannt
c.	Die Zwei Punkte Form	2 Punkte sind bekannt

<u>Die Normalform</u>

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade, die in kartesischen Koordinaten mathematisch die Formel y = mx + b erfüllt. Diese Form bzw. Formel wird auch als die Normalform einer linearen Funktion bezeichnet.

$\boxed{y = mx + b}$ Normalform

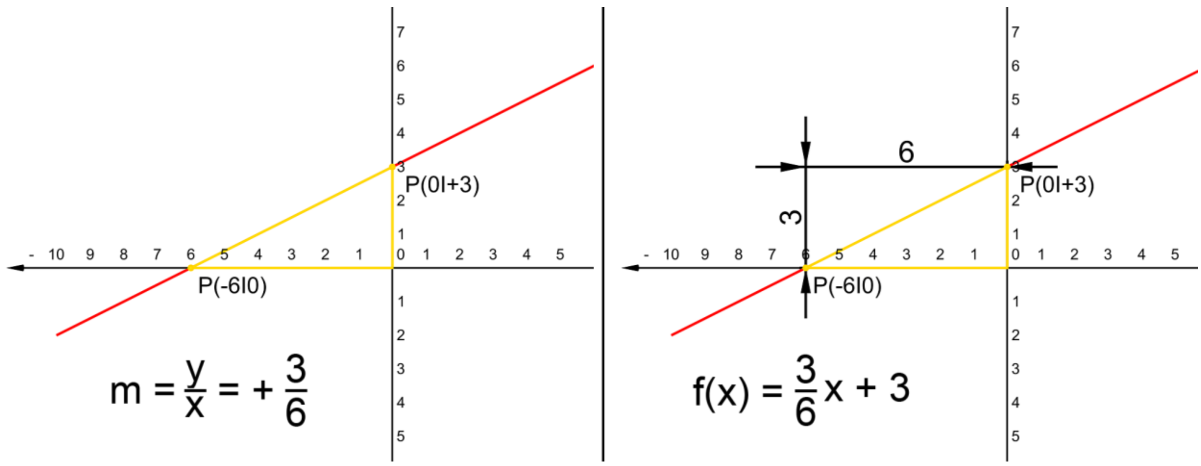


Bild links: Ableitung der Steigung m aus dem Steigungsdreieck
Bild rechts: Ableitung des Achsenabschnitts b (Schnittpunkt der y-Achse bei x = 0)

Die Normalform wird angewendet wenn die Steigung m bekannt ist. In diesem Fall wird für einen bestimmten Wert für x, der entsprechende Wert für y berechnet.

Man kann mit ihr aber auch die Nullstelle (Faktor x) und den Achsenabschnitt (Faktor b) bestimmen. Die Nullstelle ist der Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse wenn der Wert für y gleich 0 ist. Der Achsenabschnitt b ist der Wert für y, bei x=0. Hierfür wird die Normalform lediglich nach dem gesuchten Faktor umgestellt.

Lineare Funktionen

Die Normalform

Die Normalform und die umgestellten Formeln für jeden Faktor der Normalform.

$\boxed{f(x) = mx + b}$	f(x)	=	abhängige Veränderliche (y)
$\boxed{m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}}$	m	=	Steigung / +(steigt) -(fällt)
$\boxed{x = \frac{y - b}{m}}$	x	=	unabhängige Veränderliche (x)
$\boxed{b = y - mx}$	b	=	Verschiebung auf der Y-Achse x,y Koordinaten eines Punktes

Die Punkt Steigungsform

Diese Form wird angewendet, wenn 1 Punkt und die Steigung bekannt sind.

Diese ist praktisch bei Geraden, die mit einer vorgegebenen Steigung m durch einen Punkt P(x1|y1) gehen sollen. Man setzt dann m, x1 und y1 in die Gleichung ein und erhält durch Auflösen der Klammer wieder die Normalform der Geraden.

$$\boxed{y = m\,(x - x1) + y1}$$

Beispiel:
Eine Gerade hat die Steigung m = −3 und geht durch den Punkt $P_x(-1|+2)$.

$m = -3 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{-3}{+1} \quad \Rightarrow$ Die Gerade fällt, da m negativ ist !

$P_x(-1|+2) \quad \Rightarrow \quad P_x(X|Y) \quad \Rightarrow$ x1 = – 1 und y1 = + 2

$$\boxed{y = m\,(x - x1) + y1}$$

y = –3 (x – [(–1)] +2	|	m, x1 und y1 in die Gleichung einsetzen
y = –3 (x + 1) + 2	|	Klammer ausmultiplizieren und auflösen
y = –3x –3 +2	|	Zusammenfassen
y = –3x – 1	|	Rückführung auf die Normalform

Lineare Funktionen

<u>Die Zwei Punkte Form</u>

Diese Form wird angewendet, wenn 2 Punkte bekannt sind.

$$\boxed{\frac{Y-Y_1}{X-X_1}=\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}} \qquad \boxed{m=\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}}$$

Sind zwei Punkte $P_1(x1|y1)$ und $P_2(x2|y2)$ vorgegeben, durch die eine gesuchte Gerade gehen soll, dann setzt man zuerst alle Koordinaten in die Zwei-Punkteform ein und stellt die Formel nach y (also f(x)) um. Damit ergibt sich wieder eine Rückführung auf die Normalform.

Beispiel:

Eine Gerade soll durch die zwei Punkte P1 (−1|+2) und P2 (+2|+1) gehen.

$$\boxed{\frac{y-y1}{x-x1}=\frac{y2-y1}{x2-x1}}$$

$$\frac{y-(+2)}{x-(-1)}=\frac{+1-(+2)}{(+2)-(-1)}$$ | X und Y-Werte beider Punkte einsetzen

$$\frac{y-2}{x+1}=\frac{+1-2}{+2+1}$$ | Klammern auflösen

$$\frac{y-2}{x+1}=\frac{-1}{3}$$ | Zusammenfassen

$$y-2=-\frac{1}{3}(x+1)$$ | Nach y umformen

$$y=-\frac{1}{3}(x+1)+2$$ | Klammer ausmultiplizieren

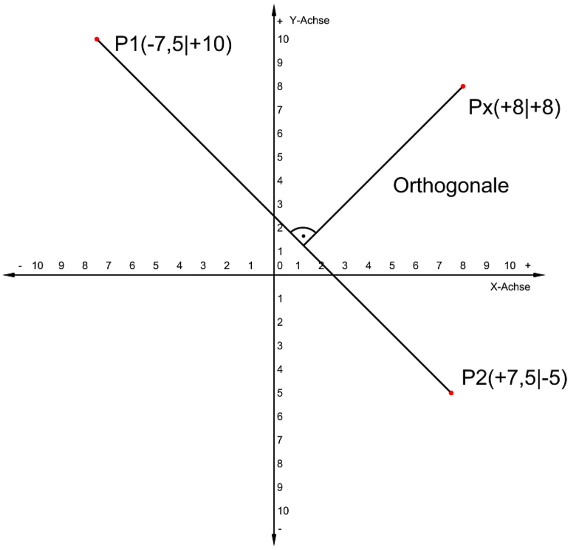
$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}+\frac{6}{3}$$ | 2 mit 3/3 erweitern um Brüche zu addieren

$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}+\frac{6}{3}$$ | Gleichnamige Brüche zusammenfassen

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$ | Gleichung in die Normalform überführen

Lineare Funktionen

<u>Berechnung einer Orthogonalen</u>
Eine Orthogonale ist eine Gerade, die senkrecht auf einer Bezugsgeraden steht. Gewöhnlich soll sie durch einen festgelegten Punkt verlaufen.



Beispiel für die Berechnung einer Orthogonalen

Sie wird berechnet, indem man die Steigung der Bezugsgeraden negiert und daraus dann den Kehrwert bildet. Die Steigungsverhältnisse kehren sich also einfach um !

$\boxed{f(x) = mx + b}$ $\boxed{m = \frac{y}{x}}$

$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$ $m = \frac{-5 - (+10)}{+7{,}5 - (-7{,}5)}$ $m = \frac{-15}{+15}$ $m = -1$

$b = y - mx$ $b = +10 - [-1(-7{,}5)]$ $b = +10 - 7{,}5$ $b = +2{,}5$

$f(x) = -x + 2{,}5$ Gleichung der Bezugsgeraden

Geg: $f(x) = -x + 2{,}5$ Punkt Px(+8|+8)

Ges: Orthogonale
Also Steigung der Ausgangsgleichung negieren und den Kehrwert bilden

$m = -1$ $m = +1$

$b = y - mx$ $b = +8 - [+1(+8)]$ $b = 0$

$G_{Orthogonale} = +1x$

Lineare Funktionen

<u>Berechnung des Schnittpunktes von 2 Geraden</u>
Schneiden sich 2 Geraden, dann liegt ein lineares Gleichungssystem mit 2 Unbekannten vor. Die Lösung dieses 2 x 2 Gleichungssystems sind die Schnittpunktkoordinaten von beiden Geraden.

Solch ein Gleichungssystem kann wie üblich über das Additionsverfahren, der Gleichsetzungs- oder Einsetzungsmethode gelöst werden.

Beispiel:
Zwei Geraden schneiden sich, gesucht ist der Schnittpunkt.

Geg: $f(x) = -x + 2{,}5$

$g(x) = +2x + 4$

Ges: Schnittpunkt P(x|y)

$f(x) = g(x)$	|	0 = 0
$-x + 2{,}5 = +2x + 4$	|	Beide Gleichungen gleichsetzen
$-x - 2x = +4 - 2{,}5$	|	Nach x umstellen
$-3x = +1{,}5$	|	Zusammenfassen
$x = +0{,}5$	|	Gesuchte x-Schnittpunktkoordinate
$g(x) = +2x + 4$	|	x in eine der Gleichungen einsetzen
$g(x) = +2(+0{,}5) + 4$		
$y = +2(+0{,}5) + 4$		
$y = +5$	|	Gesuchte y-Schnittpunktkoordinate
P(+0,5|+5)	IL={+0,5;+5}	

<u>Lösungsmöglichkeiten</u>
Bei der Lösung eines solchen Gleichungssystems gibt es jedoch 3 Möglichkeiten !

a. Schneiden die beiden Geraden einander in einem Punkt, so hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, die Schnittpunktkoordinaten.

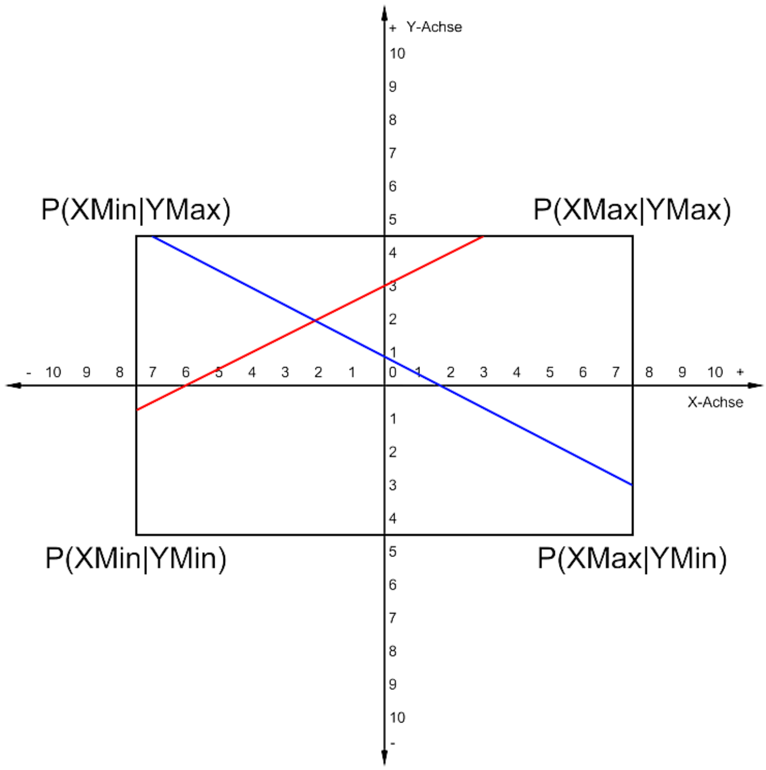
b. Verlaufen die beiden Geraden parallel zueinander, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, da es keinen Schnittpunkt gibt.

c. Gehört zu beiden Gleichungen ein und dieselbe Gerade, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, da sie deckungsgleich sind.

Lineare Funktionen

<u>Schnittpunkte bei vorgegebenen Grenzen im Raum</u>

Die Punkt Steigungsform kann ebenfalls zur Bestimmung von Schnittpunkten mit vorgegebenen Grenzen im Raum verwendet werden. Also wenn eine Gerade durch den Raum verläuft und man wissen möchte, an welchen Punkten sie eine vorgegebene Grenzlinie schneidet. Gerade in der Technik ist dies oft der Fall.



2 Geraden schneiden Grenzen (Min/Max Bereiche)

Die Grenzen sind nichts anderes als 4 Geraden, die jeweils durch 2 Punkte eindeutig bestimmt sind. Jede Umrisslinie bildet damit eine einzelne Gerade. Die Schnittpunkte mit diesen Grenzlinien bei vorgegebenen Werten für ein Minimum und Maximum können daher nach den folgenden Formeln berechnet werden.

$$\boxed{y = m\,(x - x1) + y1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y - y1 = m\,(x - x1)}$$

$$\boxed{X_{YMax} = \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}(Y_{Max} - Y_2) + X_2} \qquad \boxed{X_{YMin} = \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}(Y_{Min} - Y_2) + X_2}$$

$$\boxed{Y_{XMax} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X_{Max} - X_2) + Y_2} \qquad \boxed{Y_{XMin} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X_{Min} - X_2) + Y_2}$$

Mail: dirkkipper777@hotmail.com
Web: http://www.dirkkipper.de/

Dirk Kipper